

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $A \cdot (X + Y) \cdot A^t = A \cdot X \cdot A^t + A \cdot Y \cdot A^t = 0_2 \Rightarrow X + Y \in G.$

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$; atunci $A \cdot X \cdot A^t = (a + b + c + d) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Este evident că dacă $A \cdot X \cdot A^t = 0_2$, atunci $a + b + c + d = 0$.

c) $\det X = 0 \Rightarrow X^2 = tX$, unde $t = \operatorname{tr}(A)$. Prin inducție rezultă $X^n = t^{n-1}X$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Atunci $A \cdot X^n \cdot A^t = t^{n-1} (A \cdot X \cdot A^t) = 0_2 \Rightarrow X^n \in G.$

2. a) Prin împărțire se obține câtul $X^2 - 4X + 5$ și restul 0.

b) $f = (X^2 - 2X + 5)(X^2 - 4X + 5)$. Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x_{3,4} = 2 \pm i$, niciuna nefiind reală.

c) Prin calcul direct, folosind rezultatele obținute la punctul anterior, rezultă $|x_k| = \sqrt{5}$, $k = 1, 2, 3, 4$.